

PASS : Bases physiques des explorations médicales

Semestre 1 : Physique

Les ondes électromagnétiques ED 1

Exercice 1

2/25

Soit un faisceau de photons d'énergie 3 eV.

a) Calculer la longueur d'onde des photons en nm

Il suffit d'utiliser la formule $E = hc/\lambda$. Il est aussi impératif de connaître les gammes d'énergie liées aux photons visibles $1 \text{ eV} < E < 3 \text{ eV}$; $800 > \lambda > 400 \text{ nm}$; du rouge vers le bleu

$$\lambda \text{ (nm)} \approx \frac{1240}{E \text{ (eV)}} \sim 400 \text{ nm}$$

b) Calculer l'énergie d'un photon en joule

Pour passer d'une énergie en eV à une énergie en Joule, il suffit de multiplier par la

charge de l'électron $E[\text{J}] \sim E[\text{eV}] \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 4,8 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Exercice 1

3/25

c) Est-ce que ce type de rayonnement peut être qualifié de « ionisant » et est-il utilisé en médecine (diagnostic, radiothérapie, ophtalmologie...)?

Non, car trop peu énergétique ($E < 13,6 \text{ eV}$)

Oui

☐ Radiodiagnostic $\Rightarrow 20\text{-}140 \text{ kV}$

☐ Radiothérapie $\Rightarrow$ à minima des photons de 1 MeV (CDA dans l'eau de 10 cm)

☐ $3 \text{ eV} \Rightarrow$ frontière des UV et du visible (arrêt dans l'épiderme et le derme)

Peut être utilisé dans le cas du laser à excimère utilisable en chirurgie oculaire

Exercice 2

4/25

a) Quelle est la valeur de la période (s) et de la pulsation (rad.s^{-1}) d'un phénomène vibratoire de fréquence 10 MHz ?

$$T = \frac{1}{\nu} = 10^{-7} \text{ s} \quad \omega = 2\pi\nu = 6.10^7 \text{ rad.s}^{-1}$$

b) Une radiation lumineuse ($\nu=500\text{THz}$) se propage dans le vide avec une célérité de 3.10^8 m/s et dans le verre avec une célérité de 2.10^8 m/s . Calculer les longueurs d'onde de cette radiation dans le vide et dans le verre (en nm)

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} \left\{ \begin{array}{l} \text{Dans le vide} = 3.10^8 / 5.10^{14} = 600 \text{ nm} \\ \text{Dans le verre} = 2.10^8 / 5.10^{14} = 400 \text{ nm} \end{array} \right.$$

Exercice 2

5/25

c) Calculer la valeur (en J puis en eV) de l'énergie de masse d'un positron au repos donnée par $E=mc^2$

$$E = mc^2 = 9.10^{-31} \times (3.10^8)^2 = 81.10^{-15} \text{ J}$$

$$E \sim \frac{81.10^{-15}}{1.5.10^{-19}} = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right) \times 10^4 \sim 50.10^4 \text{ eV} = 511 \text{ keV}$$

d) Calculer la valeur de la longueur d'onde (en pm) associée à des électrons allant à la vitesse de 10^6 m.s^{-1}

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \sim \frac{6.10^{-34}}{9.10^{-31}.10^6} = \frac{2}{3} . 10^{-9} \sim 0,67.10^{-9} = 670 \text{ pm}$$

Exercice 2

6/25

e) Quelle est la valeur (en J et en eV) de l'énergie d'un photon de longueur d'onde dans le vide égale à 500 nm ?

$$E = \frac{hc}{\lambda} \sim \frac{7 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{500 \cdot 10^{-9}} = 42 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

$$E \sim \frac{42 \cdot 10^{-20}}{1,5 \cdot 10^{-19}} = \frac{6 \times 7}{3} \cdot 10^{-1} = \frac{6 \times 7 \times 2}{3} \cdot 10^{-1} = 2,8 \text{ eV}$$

Charge élémentaire

Exercice 3

7/25

Soit une onde EM dans le vide (amplitude E_0 et pulsation ω) dont le champ électrique est représenté par $\vec{E}(y, t) = E_0 \cdot \vec{u}_x \cdot \cos(-k \cdot y + \omega t)$. On admettra que l'intensité lumineuse (puissance moyenne surfacique) représente la valeur moyenne temporelle du carré du champ électrique

a) Cette onde est-elle monochromatique ? Est-elle stationnaire ?

Propagation d'une onde avec une seule pulsation ($\omega = 2\pi \cdot \nu$),
donc une seule fréquence et une seule longueur d'onde ($\lambda = c/\nu$)

OUI

Propagation d'une onde progressive (cas le plus simple).

NON

Exercice 3

8/25

b) Est-ce que cette équation de propagation peut être formulée $\vec{E} = E_0 \cdot \vec{u}_x \cdot \cos(k(y - ct))$, avec c est la célérité ? Justifier la réponse

Oui, il suffit de transformer l'équation du champ électrique, jusqu'à obtenir la bonne relation.

On utilise : $\cos(x) = \cos(-x)$, $c = \lambda/T$ (relation entre longueur d'onde et période), $k = 2\pi / \lambda$, et $\omega = 2\pi \cdot \nu$

Exercice 3

9/25

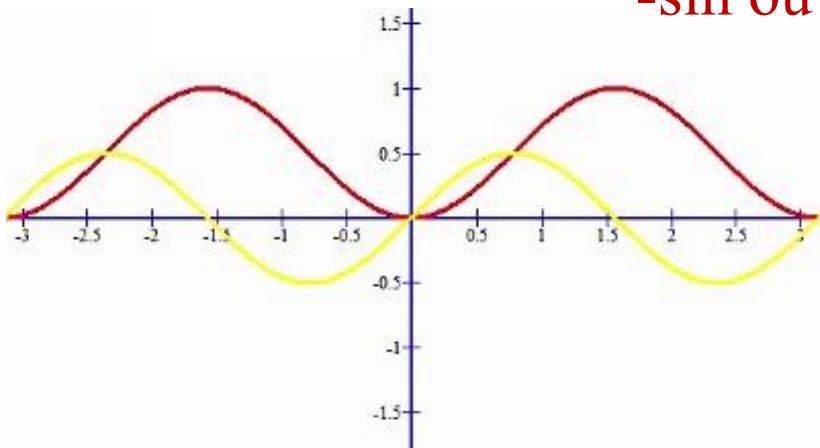
c) Que vaut l'intensité lumineuse correspondant à cette onde ?

L'intensité lumineuse vaut $\langle E^2 \rangle \Rightarrow$ moyenne du carré de E

La moyenne sur un intervalle de temps « assez grand » de :

- $\sin^2$ ou $\cos^2$ est $1/2$

- $\sin$ ou $\cos$ est 0



On obtient donc $I = E_0^2(1/2)$

Exercice 3

10/25

d) Que vaut l'intensité lumineuse de cette onde en sortie d'une zone dont la transmittance est de 25% ?

Transmittance de 25%

$$I_s(\text{intensité en sortie})/I_0(\text{intensité initiale}) = 0,25 = 1/4$$

On remplace I_0 par $E_o^2(1/2)$

$$I_s = E_o^2/8$$

Exercice 4

11/25

a) Déterminer la direction et le sens de propagation de l'onde

Rappels onde monochromatique se propageant dans la direction des x

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_m \cos(\omega t \pm k x)$$

amplitude : norme du vecteur

pulsation

nombre d'onde

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_m \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

période

longueur d'onde

Exercice 4

12/25

a) Déterminer la direction et le sens de propagation de l'onde

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - 600 x) \vec{u}_z$$

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_m \cos(\omega t \pm k x) \quad \text{ici } \vec{E}_m = E_0 \vec{u}_z$$

$$\text{amplitude du champ électrique de l'onde} = \|\vec{E}_m\| = E_0$$

$$E_x = 0$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - 600 x)$$

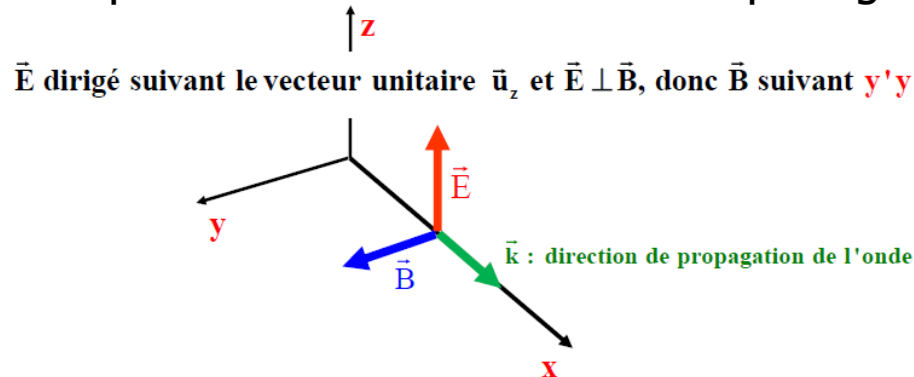
L'onde EM se propage dans la direction des **x positifs** (signe - dans la phase de l'onde)

Le champ électrique de l'onde est dirigé suivant l'axe z

Exercice 4

13/25

b) Faire un schéma précisant la direction du champ magnétique de l'onde



c) Calculer, dans le système SI, la longueur d'onde et la fréquence de l'onde

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k x) \vec{u}_z \rightarrow \text{nombre d'onde } k = 600 \text{ rad / m}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 600 \text{ rad / m} \rightarrow \frac{2 \times 3}{\lambda} \approx 600 \quad \lambda = \frac{6}{600} \text{ m} = 10^{-2} \text{ m} = 10 \text{ mm}$$

$$\lambda = c T = \frac{c}{\nu} \rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8 \text{ m.s}^{-1}}{10^{-2} \text{ m}}$$

$$\nu \approx 3.10^{10} \text{ Hz} = 30.10^9 \text{ Hz} = 30 \text{ GHz}$$

Exercice 4

14/25

d) Calculer, dans le système SI puis en eV, l'énergie d'un photon

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad E \approx \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{10^{-2}} \text{ J} \approx 20 \cdot 10^{-24} \text{ J} = 2 \cdot 10^{-23} \text{ J}$$

ou bien : $E = h\nu \approx 6,6 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^{10} = 20 \cdot 10^{-24} \text{ J}$

valeur en eV : $\lambda = 10^{-2} \text{ m} = 10^{-2} \times 10^9 \text{ nm} = 10^7 \text{ nm}$

$$E(\text{eV}) \approx \frac{1240}{\lambda(\text{nm})} = \frac{1,24 \cdot 10^3}{10^7} \approx 1,24 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

Exercice 5

15/25

a) Est-ce que cette onde est visible par l'œil humain ?

$$\vec{E} = E_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{2.10^{-15}} - \frac{x}{6.10^{-7}} \right) \vec{u}_y - E_0 \cos 2\pi \left(\frac{t}{2.10^{-15}} - \frac{x}{6.10^{-7}} \right) \vec{u}_z$$

$$\lambda = 6.10^{-7} = 600 \text{ nm}$$

Orange

b) Quelle est sa fréquence et son amplitude

$$\nu = \frac{1}{2.10^{-15}} = 5.10^{14} \text{ Hz}$$

Exercice 5

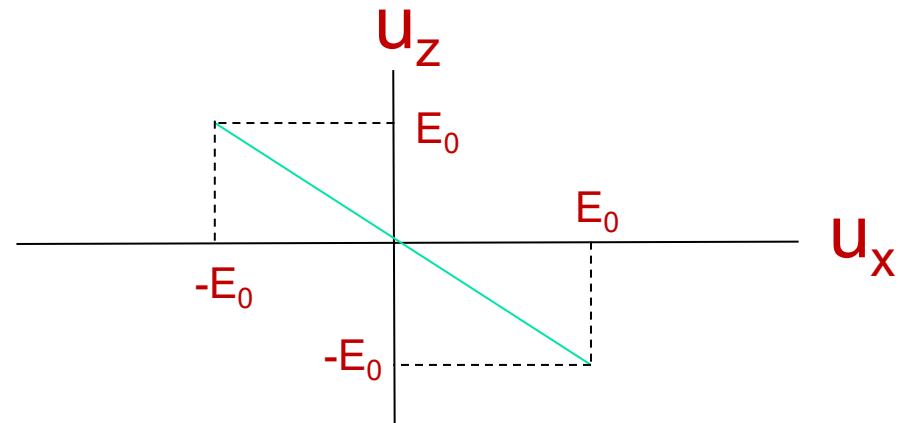
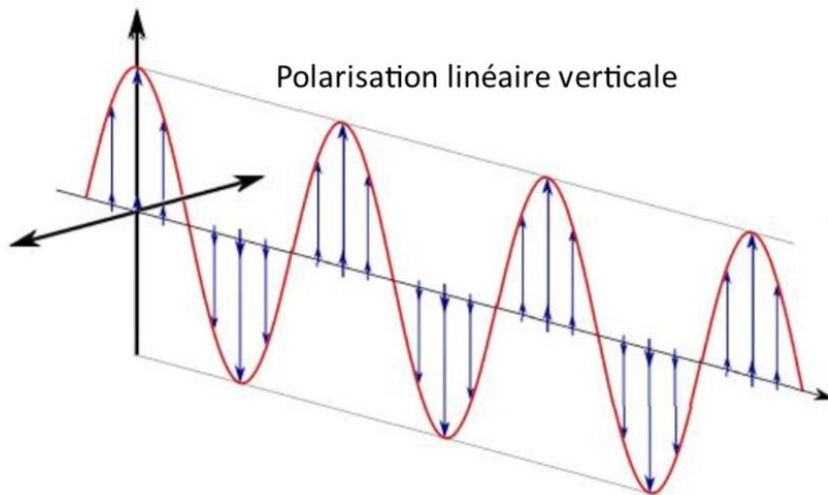
16/25

c) Que décrit la pointe du vecteur champ électrique quand $x = 0$?

Quand $x=0$

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T}\right)\right) \\ E_z = -E_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T}\right)\right) \\ E_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{E_x = -E_z}$$

Equation d'une droite
=> Polarisation linéaire



Exercice 6

17/25

Déterminer, en cm^{-1} , la valeur du coefficient d'atténuation linéaire μ de l'os

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x}$$

μx sans dimension

$$I(x = 2 \text{ cm}) = I_0 e^{-2\mu} \quad \frac{I(x = 2 \text{ cm})}{I_0} = e^{-2\mu}$$

Le matériau atténue 90% de l'intensité I_0 du faisceau incident

$$\frac{I(x = 2 \text{ cm})}{I_0} = 10\% = \frac{10}{100} = 0,1 = e^{-2\mu} \quad \rightarrow \quad \mu = ? \quad \ln 0,1 = -2\mu = \ln 10^{-1}$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

$$\ln 10 = 2,3 \rightarrow \ln 10^{-1} = -2,3$$

$$\mu = 1,15 \text{ cm}^{-1}$$

Exercice 7

18/25

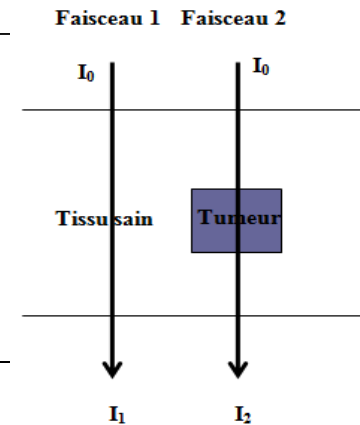
a) Que vaut le rapport I_0/I_1 ?

Ce qu'il faut savoir pour réussir ce genre d'exercice :

- $I(x) = I(x=0) \cdot \exp(-\mu \cdot x)$ μ = coefficient d'atténuation

- $I(nCDA) = I(x=0)/2^n$

- $CDA = \ln(2)/\mu$



I_1 s'obtient après la traversée de 4 $(CDA)_{\text{sain}}$

Nbre de CDA = longueur
totale / longueur d'une CDA
 $= 4/1 = 4$

$$I_1 = I(4CDA) = I_0/2^4 \\ = I_0/16$$

Exercice 7

19/25

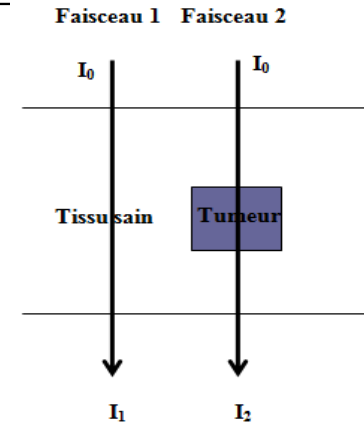
b) Que vaut le rapport I_0/I_2 ?

Ce qu'il faut savoir pour réussir ce genre d'exercice :

- $I(x) = I(x=0) \cdot \exp(-\mu \cdot x)$ μ = coefficient d'atténuation

- $I(nCDA) = I(x=0)/2^n$

- $CDA = \ln(2)/\mu$



Deux sous problèmes, la traversée de la tumeur (I_2') puis la traversée du tissu sain (I_2).

- 1 cm de tumeur correspond à 2 (CDA)_{tumeur},

- Puis 3 cm de tissu sain correspondent à 3 (CDA)_{sain}

$$I_2' = I(2CDA) = I_0/2^2 = I_0/4$$

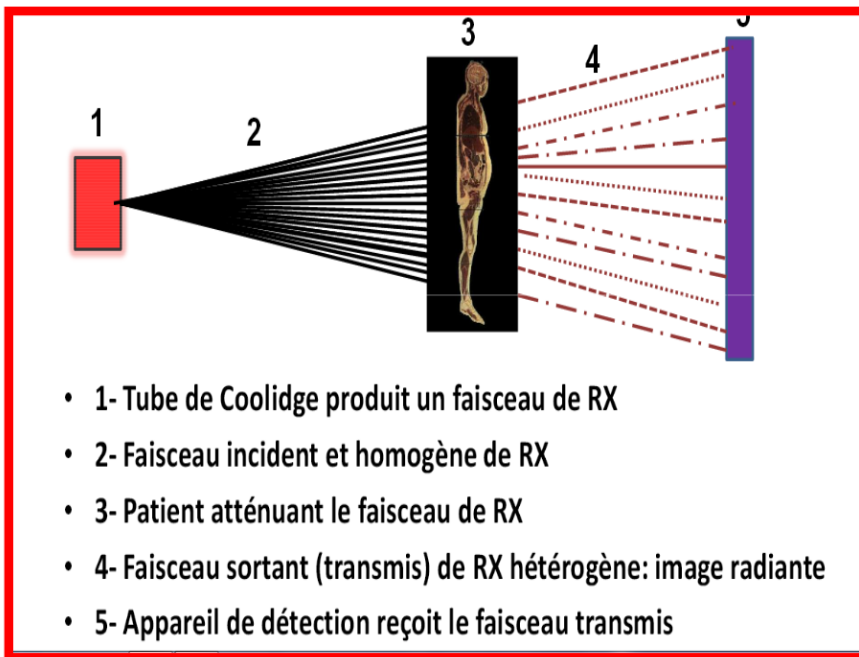
$$I_2 = I_2'/2^3 = I_0/32$$

Exercice 7

20/25

c) Que vaut le contraste C ?

$$C = \left| \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \right| = \frac{\frac{I_0}{16} - \frac{I_0}{32}}{\frac{I_0}{16} + \frac{I_0}{32}} = \frac{\frac{32I_0}{16 \times 32} - \frac{16I_0}{16 \times 32}}{\frac{32I_0}{16 \times 32} + \frac{16I_0}{16 \times 32}} = \frac{32I_0 - 16I_0}{32I_0 + 16I_0}$$



$$C = \frac{32 - 16}{32 + 16} = \frac{16}{16 \times 3} = \frac{1}{3}$$

Exercice 8

21/25

a) Calculer l'absorbance de l'échantillon

Loi de Beer-Lambert $\ln \frac{I}{I_0} = -\mu x$ **Absorbance** $A = \log_{10} \frac{I_0}{I} = \frac{\mu x}{2,3}$

$$A = \log \left(\frac{I_0}{I} \right) = \log(0,2^{-1}) = -\log(0,2)$$

$$A = -\log(2 \cdot 10^{-1}) = -\log(2) - \log(10^{-1})$$

$$A = -\log(2) + 1 = 1 - 0,3 = 0,7$$

Soit la transmittance (T) = I / I₀ alors A = -log(T)

Exercice 8

22/25

b) Quelle sera l'intensité lumineuse après la traversée de 2,0 mm de cette même solution ?

$$A(1\text{mm}) = 0,7 = \frac{\mu \cdot x}{2,3} \Rightarrow \mu = \frac{2,3 \times 0,7}{1} \text{ mm}^{-1}$$

$$A(2\text{mm}) = \frac{\mu \cdot x}{2,3} = \frac{2,3 \times 0,7 \times 2}{2,3} = 1,4$$

Exercice 9

23/25

Que vaut l'énergie cinétique maximale de l'électron Compton si le photon incident à une énergie de 255,5 keV ?

$$E_d = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

$$E_a = E_0 - E_d$$

énergie cinétique de l'électron diffusé

E_a est min quand $\theta = 0$ et max quand $\theta = \pi$

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow E_d = E_0 \Rightarrow E_a = 0$$

Exercice 9

24/25

Que vaut l'énergie cinétique maximale de l'électron Compton si le photon incident à une énergie de 255,5 keV ?

$$\theta = \pi \Rightarrow \cos\theta = -1 \qquad E_d(\theta = \pi) = \frac{E_0}{1 + \frac{2E_0}{m_e c^2}}$$

$$(E_a)_{max} = E_0 - E_d(\theta = \pi) = E_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2E_0}{m_e c^2}} \right)$$

$m_e c^2 = 511 \text{ keV}$

Exercice 9

25/25

Que vaut l'énergie cinétique maximale de l'électron Compton si le photon incident à une énergie de 255,5 keV ?

Si $E_0 = 255,5 \text{ keV}$

$$(E_a)_{max} = E_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{2E_0}{m_e c^2}} \right)$$

$$(E_a)_{max} = 255,5 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{511}{511}} \right) = 255,5 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{255,5}{2}$$

$\sim 128 \text{ keV}$